

SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

Pod sistemom dvije linearne jednačine sa dvije nepoznate x i y podrazumjevamo:

$$\begin{aligned}a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2\end{aligned}$$

Ovo je takozvani "prost" sistem do koga uvijek možemo doći ekvivalentnim transformacijama, koje su da vas podsjetim:

- Prvo se oslobodimo razlomaka (ako ih ima) tako što cijelu jednačinu pomnožimo sa NZS
- Onda se oslobodimo zagrada (ako ih ima) množeći „svaki sa svakim” ili kvadriranjem.
- Nepoznate prebacimo na jednu a poznate članove na drugu stranu znaka jednakosti ($=$).
- Sredimo obje strane (saberemo i oduzmemo članove koji se mogu sabirati, tj. oduzimati)

Ovdje su $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ dati realni brojevi (ponekad mogu biti i parametri).

Rješenje sistema je uređeni par brojeva (x_0, y_0) za koji važi da je:

$$\begin{aligned}a_1x_0 + b_1y_0 &= c_1 \\ a_2x_0 + b_2y_0 &= c_2\end{aligned}$$

Sisteme možemo riješiti pomoću više metoda:

- metoda zamjene,
- metoda suprotnih koeficijenata,
- grafička metoda,
- metoda determinanti.

Napomenimo samo da dati sistem može imati: jedinstveno rješenje, beskonačno mnogo rješenja ili pak da nema rješenja (kao i jednačina).

METOD SUPROTNIH KOEFICIJENATA

Najprije ćemo proučiti metod SUPROTNIH KOEFICIJENATA.

Ideja je da množenjem jedne (ili obje) jednačine odgovarajućim brojem napravimo da ispred x ili y budu isti brojevi ali suprotnog znaka. Onda te dvije jednačine saberemo i oslobodili smo se jedne nepoznate! Izračunamo drugu nepoznatu i vratimo se u bilo koju od jednačina iz prostog sistema da bismo izračunali prvu nepoznatu.

Primjer 1:

Metodom suprotnih koeficijenata riješi sistem linearnih jednačina.

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 6y = 7 \\ \hline \end{array}$$

Rješenje:

Potrebno je da ispred jedne nepoznate napravimo isti broj, suprotnog predznaka. Najlakše je da prvu jednačinu pomnožimo sa 2.

$$\begin{array}{r} \rightarrow 2x + 3y = 7 \cdot 2 \\ 3x - 6y = 7 \\ \hline + \left\{ \begin{array}{l} 4x + 6y = 14 \\ 3x - 6y = 7 \end{array} \right. \\ \hline 7x = 21 \\ x = \frac{21}{7} \\ x = 3 \end{array}$$

Rješenje koje smo dobili za x uvrstimo u jednu od jednačina, npr. u prvu:

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 3 + 3y = 7 \\ 6 + 3y = 7 \\ 3y = 7 - 6 \\ 3y = 1 \\ y = \frac{1}{3} \end{array}$$

Dakle, rješenje ovog sistema linearnih jednačina je $(x, y) = (3, \frac{1}{3})$.

Primjer 2:

Riješi sistem jednačina:

$$\begin{array}{r} 5x + y = -1 \\ -10x - 2y = 2 \end{array}$$

Rješenje:

Pomnožimo prvu jednačinu sa 2.

$$\begin{array}{r} 5x + y = -1/2 \\ -10x - 2y = 2 \\ \hline 10x + 2y = -2 \\ -10x - 2y = 2 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

Dogodilo se da su se poništile obje nepoznate, a takođe i slobodan član. To nam govori da je sistem neodređen i ima beskonačno rješenja. U tom slučaju iz jedne jednačine izrazimo jednu nepoznatu preko druge. Na primjer iz prve izrazimo y .

$$\begin{aligned} 5x + y &= -1 \\ y &= -1 - 5x \end{aligned}$$

Dakle, rješenje sistema je:

$$\begin{aligned} (x, y) &= (x, -1 - 5x) \\ x &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Primjer 3:

Riješi sistem jednačina:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ -2x - 3y &= 5 \end{aligned}$$

Rješenje:

Možemo odmah sabrati jednačine.

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = 4 \\ -2x - 3y = 5 \\ \hline 0 = 9 \end{array}$$

Dobili smo netačnu jednakost što znači da sistem nema rješenje.

Primjer 4:

Riješi sistem jednačina:

$$\frac{5x-1}{6} + \frac{3y-1}{10} = 3$$

$$\frac{11-x}{6} + \frac{11+y}{4} = 3$$

Rješenje:

Prvo ćemo se osloboditi razlomaka u jednačinama tako što ćemo obje jednačine pomnožiti sa NZS.

$$\frac{5x-1}{6} + \frac{3y-1}{10} = 3 \dots / \cdot 30$$

$$\frac{11-x}{6} + \frac{11+y}{4} = 3 \dots / \cdot 12$$

$$5(5x-1) + 3(3y-1) = 90$$

$$2(11-x) + 3(11+y) = 36$$

Poslije oslobađanja zagrada dobijamo:

$$25x - 5 + 9y - 3 = 90$$

$$22 - 2x + 33 + 3y = 36$$

$$25x + 9y = 90 + 5 + 3$$

$$-2x + 3y = 36 - 22 - 33$$

$$25x + 9y = 98$$

$$-2x + 3y = -19 / \cdot (-3)$$

$$\left. \begin{array}{l} 25x + 9y = 98 \\ 6x - 9y = 57 \end{array} \right\} +$$

Drugu jednačinu smo pomnožili sa -3 da bismo napravili suprotan koeficijent. Saberemo jednačine i dobijemo:

$$31x = 155$$

$$x = 5$$

$$-2x + 3y = -19$$

$$-10 + 3y = -19$$

$$-2 \cdot 5 + 3y = -19$$

$$3y = -19 + 10$$

$$3y = -9$$

$$y = -3$$

Kada smo dobili $x = 5$, uvrstili smo vrijednost nepoznate x u drugu jednačinu i izračunali nepoznatu y . Dakle, rješenje sistema je $(x, y) = (5, -3)$.

Domaći zadatak!!!

1) Metodom suprotnih koeficijenata riješi sisteme:

•

$$7x + 4y = 12$$

$$5x - 2y = 11$$

•

$$3(x - 1) + 5(y - 1) = -4$$

$$5(x + 3) - 3(y + 1) = 64$$

•

$$(x - 1)(y + 2) - (x - 2)(y + 5) = 0$$

$$(x + 4)(y - 3) - (x + 7)(y - 4) = 0$$